

qui donne une mesure de l'importance des extrêmes dans la loi de rentabilités. Cette mesure statistique, appelée indice de queue (*tail index* en anglais), est utilisée pour construire un test formel pour différencier les modèles couramment utilisés en finance.

Le reste de cette étude est organisé comme suit : la première partie présente la théorie de la valeur extrême et décrit l'application de cette théorie pour différencier les différentes lois pour les rentabilités. La deuxième partie présente des méthodes d'estimation des paramètres de la loi statistique des extrêmes et en particulier l'indice de queue. Les résultats empiriques sont ensuite donnés en troisième partie. La dernière partie conclut l'étude et expose quelques applications pratiques en finance.

1. THÉORIE DE LA VALEUR EXTRÊME

Cette présentation s'inspire du livre de Gumbel (1958) qui donne un excellent exposé du sujet. De nouvelles avancées concernant les processus sont aussi discutées. Finalement, l'application de la théorie de la valeur extrême comme moyen de différenciation entre les lois de rentabilités est présentée.

1.1. Résultats exacts

Cette sous-partie présente quelques résultats statistiques exacts sur les extrêmes. Le phénomène observé est mesuré par une variable aléatoire notée X . Dans notre étude empirique, le phénomène est le mouvement du marché boursier et la variable aléatoire X est la rentabilité logarithmique quotidienne du marché boursier français représenté par l'indice CAC Général 240. Appelons f_X la fonction de densité et F_X la fonction de répartition associées à la variable aléatoire parente X . Le support de la fonction de densité est notée (l, u) . Soit X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires mesurant l'événement aux instants 1, 2, ..., n . Les extrêmes sont définis comme les maxima et les minima des n variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n . Soit Y_n la plus haute rentabilité quotidienne (le maximum) et Z_n la plus basse rentabilité quotidienne (le minimum) observées pendant n séances boursières ⁽²⁾. Si les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont statistiquement indépendantes et de même loi (hypothèse de la marche aléatoire pour les prix de marché testée empiriquement par Fontaine (1990), alors comme le montre Jacob (1989), la loi exacte du maximum notée F_{Y_n} évaluée au point x est simplement donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = [F_X(x)]^n. \quad (1)$$

La loi du maximum F_{Y_n} dépend essentiellement des propriétés de la loi de la variable parente, F_X , pour de grandes valeurs de x . En effet, pour de faibles valeurs de x , l'influence de $F_X(x)$ décroît rapidement avec n . De la formule (1), on déduit que la loi limite de Y_n est nulle pour les valeurs de x inférieures à

la borne supérieure du support de la loi de X , u , et égal à 1 pour les valeurs de x plus grandes que u . C'est une loi dégénérée.

Les formules exactes de la loi du maximum et de sa loi limite ne sont cependant pas spécialement intéressantes. En pratique, la loi de la variable parente (la rentabilité journalière) n'est pas connue avec précision et, de ce fait, si cette loi n'est pas connue, la loi exacte du maximum ne l'est pas non plus. Même si la loi de la variable parente est connue précisément, la loi du maximum n'est pas pour autant facilement calculable. Par exemple, la loi normale ne possède pas d'expression analytique puisqu'elle s'exprime à l'aide d'une intégrale. Sa puissance $n^{\text{ème}}$ est ainsi difficile à calculer et conduit à des erreurs numériques pour de grandes valeurs de n et de x . Pour des raisons à la fois théorique et pratique, le comportement asymptotique du maximum Y_n est étudié.

1.2. Un résultat limite : le théorème de la valeur extrême

Tiago de Oliveira (1973) dit, « Puisque, en général, nous avons des échantillons suffisamment larges, il est naturel et en général suffisant pour des raisons pratiques de trouver des lois limites pour le maximum ou le minimum convenablement réduits et de les utiliser. » Pour trouver une loi limite d'intérêt, la variable aléatoire Y_n est transformée de telle sorte que la loi limite de la nouvelle variable ne soit pas dégénérée. La transformation la plus simple est l'opération de normalisation. La variable Y_n est ajustée avec un paramètre d'échelle α_n (supposé positif) et un paramètre de localisation β_n . Dans le reste de l'étude, l'existence d'une séquence de tels coefficients ($\alpha_n > 0$, β_n) est supposée⁽³⁾. Le théorème de la valeur extrême spécifie la forme de la loi limite lorsque la variable n tend vers l'infini. Bien que le résultat du théorème reste vrai sous des hypothèses moins restrictives (cf. sous-partie 1.3), le théorème de base peut être obtenu à partir des quatre hypothèses suivantes :

- H1. Les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires.
- H2. Les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont statistiquement indépendantes.
- H3. Les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont tirées de la même loi.

H4. Il existe une séquence de coefficients de normalisation ($\alpha_n > 0$, β_n) tels que la loi limite F_Y de la variable réduite $(Y_n - \beta_n)/\alpha_n$ ne soit pas dégénérée.

Le théorème de la valeur extrême montré par Gnedenko (1943) donne la forme de la loi limite F_Y dont l'expression la plus générale est due à Jenkinson (1955) :

$$F_Y(y) = \exp \left[- (1 - \tau \cdot y)^{\frac{1}{\tau}} \right] \begin{cases} \text{pour } y > \tau^{-1} & \text{si } \tau < 0 \\ \text{pour } y > \tau^{-1} & \text{si } \tau > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Selon les valeurs du paramètre τ , la loi des extrêmes peut être réécrite :

— *Loi de Gumbel (type I)*

$$F_Y(y) = \exp(-e^{-y}) \quad \text{pour } y \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

— *Loi de Fréchet (type II)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leq 0 \\ \exp(-y^{-k}) & \text{pour } y > 0 (k > 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

— *Loi de Weibull (type III)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} \exp(-(-y^{-k})) & \text{pour } y < 0 (k < 0) \\ 1 & \text{pour } y \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Le paramètre τ , appelé indice de queue, détermine le type de loi : $\tau < 0$ correspond au type II, $\tau > 0$ au type III, et le cas limite $\tau = 0$ correspond au type I, $(1 - \tau \cdot y)^{1/\tau}$ étant interprété comme e^{-y} . La loi de Gumbel peut être considérée comme une loi de transition entre les lois de Fréchet et de Weibull.

Le paramètre k , appelé paramètre de forme, reflète le poids de la queue de la distribution de la variable parente : plus k est petit, plus la queue de la distribution de X est épaisse. L'indice de queue et le paramètre de forme sont liés par la formule : $\tau = -1/k$. Le paramètre de forme k et les coefficients de normalisation α_n et β_n peuvent être différents pour le minimum et le maximum. La queue de la distribution F_X est soit décroissante de façon exponentielle (type I), soit décroissante comme une fonction puissance (type II), soit bornée (type III). Dans le premier et le troisième cas, tous les moments de la loi de X sont bien définis. Dans le deuxième cas, la loi de X présente des queues épaisses (*fat-tailed distribution* en anglais) et le paramètre de forme k est égal à l'ordre du moment maximal. Les moments d'ordre r plus grands que k sont infinis et les moments d'ordre r plus petits que k sont finis. Par exemple, si k est plus grand que l'unité, alors la moyenne des rentabilités existe; si k est plus grand que deux, alors la variance est finie, si k est plus grand que trois, alors la skewness est définie et ainsi de suite. C'est ce lien entre l'existence des moments de la distribution des rentabilités et la valeur du paramètre de forme qui est utilisé par la suite. Le paramètre de forme est un paramètre intrinsèque du processus de rentabilités et ne dépend pas du nombre de rentabilités quotidiennes parmi lesquelles la rentabilité maximale est sélectionnée. Les paramètres d'échelle α_n et de localisation β_n dépendent de la longueur de la période de sélection, n , et représentent respectivement la dispersion et la taille des extrêmes.

Le théorème de la valeur extrême donne un résultat intéressant : quelle que soit la loi de la variable parente, la loi limite des extrêmes a toujours la même forme. La loi des extrêmes pour deux processus parents différents se différencie par les valeurs des coefficients de normalisation et de l'indice de queue.

Gnedenko (1943) donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une loi donnée appartienne au domaine d'attraction d'un des trois types de loi :

Pour le type I :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot [1 - F_X(a_n \cdot x + b_n)] = e^{-x}, \quad (C1)$$

où a_n et b_n sont l'intensité maximale et la valeur caractéristique maximale définies dans Gumbel (1958, pp. 158-159);

Pour le type II :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - F_X(t \cdot x)}{1 - F_X(t)} = x^k, \quad (C2)$$

où $t > 0$ et $k > 0$. La condition (C2) exprime le fait que la variable parente X varie régulièrement à l'infini (Feller, 1971, Ch. VIII);

Pour le type III :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - F_X(t \cdot x + u)}{1 - F_X(x + u)} = x^{-k}, \quad (C3)$$

où u est la borne supérieure du support de la loi de X , $t > 0$ et $k < 0$.

Les conditions ci-dessus peuvent être employées dans des cas spécifiques pour dériver le type de la loi asymptotique des extrêmes.

Les résultats de base de l'article de Gnedenko (1943) sont les suivants : seules des variables non bornées (à droite, $u = +\infty$) admettent pour limite une loi de Fréchet; seules des variables bornées (à droite, $u = +\infty$) admettent la loi de Weibull comme limite alors que la loi de Gumbel peut être la limite des variables bornées ou non. Il faut aussi noter que certaines lois n'admettent pas de loi limite pour leurs extrêmes (⁴).

1.3. Application à la finance

Plusieurs lois ont été proposées dans la littérature financière pour décrire les rentabilités boursières (⁵). La plupart des études empiriques en finance suppose que les rentabilités des actifs financiers sont distribuées normalement avec une moyenne et une variance constantes au cours du temps. La loi normale pour les rentabilités est en accord avec le modèle de diffusion rendu populaire par l'article de Black and Scholes (1973) pour évaluer le prix d'une option. De plus, la plupart des tests statistiques repose sur l'hypothèse de normalité. La loi normale appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel (type I) ce qui implique une valeur de l'indice de queue égale à zéro.

Il y a désormais de nombreux travaux empiriques qui montrent que la loi des rentabilités boursières diffère de la normalité. En particulier, il y a plus d'observations extrêmes que ne le prévoit le modèle gaussien. Ceci est d'une grande importance puisque les queues de distribution déterminent en partie le degré de volatilité. Et la volatilité, mesure du risque, est certainement l'une des variables les plus importantes en finance.

Les principaux modèles alternatifs à la loi normale sont répertoriés ci-dessous et nous montrons comment ces modèles peuvent être différenciés en utilisant l'indice de queue.

Mandelbrot (1963) suggéra en premier que la variance de certains prix n'était pas définie. En étudiant les prix du coton, il conclut que les lois stables de Pareto-

Lévy à variance infinie correspondaient mieux aux données que le modèle gaussien. Fama (1965) et Walter (1988) étendirent cette approche aux prix des actifs financiers. Leurs résultats empiriques montrèrent que les lois stables de Pareto-Lévy donnaient aussi une meilleure description des rentabilités quotidiennes des actions cotées sur le marché américain comme sur le marché français. Comme le montrent Hols et De Vries (1991), les lois stables de Pareto-Lévy vérifient la condition (C2) et appartiennent donc au domaine d'attraction de la loi de Fréchet (type II) avec un paramètre de forme k égal à l'exposant caractéristique généralement noté α . Dans le cas des lois stables, la valeur du paramètre de forme k est donc inférieure à deux et de façon équivalente l'indice de queue τ est inférieur à $-1/2$. Si la loi des rentabilités boursières présentent des queues épaisses, cela n'implique pas forcément une variance infinie. Par exemple, les lois de Student introduites en finance par Praetz (1972) présentent des queues épaisses mais ont cependant une variance finie. Les lois de Student satisfont la condition (C2) comme l'ont montré Mood *et al.* (1974, p. 262) et appartiennent donc au domaine d'attraction de la loi de Fréchet (type II) avec un paramètre de forme égal au degré de liberté de la loi de Student. Dans le cas des lois de Student, le paramètre de forme k est supérieur à deux et de façon équivalente l'indice de queue est compris entre $-1/2$ et 0.

Le théorème de la valeur extrême présentée ci-dessus repose sur quatre hypothèses (H1-4) mais des extensions aux processus ont récemment été proposées. La même forme de loi limite est obtenue même si les hypothèses de base sont relâchées. C'est par exemple le cas si les variables d'un processus sont distribuées d'après la loi normale mais sont corrélées. Berman (1964) a montré que si la série des coefficients de corrélation au carré est finie, alors une loi du type I est obtenue pour les extrêmes. Les mélanges de lois normales en nombre fini introduits par Kon (1984) sont parfois utilisés pour tenir compte de l'hétérogénéité due par exemple à l'effet jour de la semaine (voir Louvet et Taramasco (1990) et Hamon et Jacquillat (1993) pour des études empiriques sur le marché français). Press (1972) a aussi suggéré des processus de diffusion avec sauts à amplitude finie pour tenir compte des discontinuités dans les cours. Les mélanges de lois normales en nombre fini et les processus de diffusion avec sauts à amplitude finie sont leptokurtiques mais présentent des queues fines comme la loi normale. Ces modèles appartiennent donc au domaine d'attraction de la loi de Gumbel comme l'ont montré Leadbetter *et al.* (1983).

La volatilité varie en réalité beaucoup plus dans le temps. L'hétéroscédasticité ne semble pas limitée à l'effet jour. Mandelbrot (1963) fut le premier à observer que les variations extrêmes de prix tendaient à se concentrer dans le temps (*volatility clustering* en anglais) : de grands changements dans les prix tendaient à être suivis par de grands changements de prix de signe quelconque, et de même de petits changements de prix tendaient à être suivis par de petits changements de prix de signe quelconque. Les processus ARCH proposés par Engle (1982) modélisent ce phénomène et correspondent assez bien au comportement de la volatilité du marché français comme l'a montré Alexandre (1991). De Haan *et al.* (1989) montrèrent que si X suit un processus ARCH, alors la variable maximum Y_n

appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet (type II) ⁽⁶⁾. Reprenant leur recherche, la relation entre les paramètres d'un processus ARCH (1) et ceux de la loi du maximum est détaillée ci-dessous. Rappelons qu'un processus ARCH (1) est donné par deux équations :

$$R_t = E_{t-1}(R_t) + \epsilon_t, \quad (3a)$$

$$h_t \equiv \text{Var}_{t-1}(R_t) = a_0 + a_1 \cdot \epsilon_{t-1}^2 \quad (3b)$$

La rentabilité réalisée R_t sur la période $[t - 1, t]$ se décompose en une partie prévisible notée $E_{t-1}(R_t)$ calculée à l'instant $t - 1$ et une partie imprévisible notée ϵ_t connue à l'instant t seulement. La variance anticipée h_t varie en fonction du temps et est conditionnée sur la valeur passée de l'innovation, ϵ_{t-1} . Le modèle ARCH reflète assez bien les variations de la volatilité et en particulier le regroupement des extrêmes. Après le grand choc (i. e. une grande valeur pour ϵ_{t-1}), on s'attend à un niveau élevé de la variance et à d'autres grands chocs dans le futur. Le coefficient a_1 reflète la persistance de la volatilité. Une grande valeur pour a_1 implique un haut niveau de persistance, d'importants regroupements d'extrêmes et enfin une loi marginale avec des queues plus épaisses. Le paramètre de forme de la loi du maximum est lié au degré de persistance a_1 selon la formule ci-dessous due à De Haan *et al.* (1989, p. 215).

$$E[(a_1 \cdot \epsilon^2)^k] = 1 \quad (4)$$

Supposant une loi normale conditionnelle pour l'innovation ϵ , l'équation (4) devient :

$$\Gamma(k + 1/2) = \pi^{1/2} \cdot (2 \cdot a_1)^{-k} \quad (5)$$

Pour une valeur donnée du paramètre a_1 , une valeur unique de k est obtenue en résolvant l'équation (5). Par exemple, pour a_1 égal à 1/2, le paramètre k vaut 2 365.

Une étude des valeurs extrêmes des rentabilités boursières nous permet donc de différencier les modèles présentés ci-dessus. Bien que tous les processus de rentabilités conduisent à la même forme de loi asymptotique d'extrêmes, les valeurs des paramètres de cette loi diffèrent selon les modèles. En particulier, la valeur de l'indice de queue τ permet de différencier ces processus en fournissant un test direct sans faire d'hypothèses préalables sur la loi des rentabilités journalières. Si τ n'est pas significativement différent de zéro, alors la loi de Gumbel peut être considérée comme la loi asymptotique. La loi de la variable parente présente alors des queues fines. Un tel cas est alors compatible avec la loi normale, les mélanges de lois normales en nombre fini et les processus de diffusion avec sauts à amplitude finie. Si τ est significativement négatif, alors la loi de Fréchet peut être considérée comme la loi asymptotique. La loi de la variable parente présente alors des queues épaisses. Une valeur de τ inférieure à $-1/2$ est compatible avec les lois stables de Pareto-Lévy à variance infinie alors qu'une valeur de τ comprise entre $-1/2$ et 0 est compatible avec les lois de Student et les processus ARCH. Le tableau 1 résume ces résultats.

TABLEAU 1. — *Lois de rentabilités et indice de queue de la loi asymptotique d'extrêmes*

Modèles pour décrire les rentabilités	Type	Indice de queue τ	Paramètre de forme k
Loi normale	I	$\tau=0$	$k=+\infty$
Processus auto-régressif à innovations gaussiennes	I	$\tau=0$	$k=+\infty$
Mélanges de lois normales en nombre fini	I	$\tau=0$	$k=+\infty$
Processus de diffusion avec sauts à amplitude finie	I	$\tau=0$	$k=+\infty$
Lois de Student	II	$0 > \tau \geq -1/2$	$k \geq 2$
Processus ARCH	II	$0 > \tau > -1/2$	$k > 2$
Lois stables de Pareto-Lévy	II	$\tau < -1/2$	$k < 2$

Note : Le type fait référence au type de la loi asymptotique d'extrêmes obtenu pour chaque modèle étudié : type I (loi de Gumbel) et type II (loi de Fréchet). Le paramètre de forme k est l'inverse de l'indice de queue τ avec un signe opposé $k = -1/\tau$. Les deux dernières colonnes indiquent les contraintes pour les paramètres τ et k imposées par chaque modèle.

Notons que les modèles présentés ci-dessus peuvent être réécrits à partir d'une loi normale dont la variance est aléatoire. La loi normale non conditionnelle correspond au cas particulier d'une variance constante. Un mélange de lois normales en nombre fini peut être interprété comme une loi normale dont la variance est tirée aléatoirement d'un ensemble fini de réels strictement positifs. Une loi de Student peut être considérée comme une loi normale dont la variance suit une loi Gamma inversée (Chu, 1973). Un processus GARCH peut être considéré comme une loi normale dont la variance suit une loi du chi-deux (Duan, 1995). Selon la loi gouvernant la variance, le poids des observations extrêmes est différent. Une loi de Cauchy qui est une loi stable de Pareto-Lévy peut s'écrire sous la forme d'une loi normale dont la variance suit une loi Gamma d'indice — (Chu 1973). Dans le cas des lois de Student, des lois stables de Pareto-Lévy et des processus ARCH, le support de la loi de la variance n'est pas borné et de grandes réalisations de la variance correspondant à des périodes de forte volatilité peuvent être obtenues.

2. ESTIMATION DE L'INDICE DE QUEUE

Le théorème de la valeur extrême donne un résultat théorique concernant la loi limite des extrêmes normalisés. En pratique, nous estimons la loi asymptotique d'où les extrêmes observés sont tirés. Cette loi comprend trois paramètres : α_n , β_n et τ . Différentes méthodes d'estimation sont proposées ci-dessous (⁷).

2.1. Méthode paramétrique du maximum de vraisemblance

Pour estimer de façon paramétrique la loi asymptotique des extrêmes, nous supposons que les observations d'extrêmes sélectionnées sur une période de longueur donnée sont exactement tirées de la loi asymptotique. Sous cette hypothèse, la méthode du maximum de vraisemblance donne des estimateurs sans biais et asymptotiquement normaux. La variance asymptotique est égal à la borne inférieure de Cramer-Rao. Le système d'équations issues des conditions du premier ordre est donné dans Tiago de Oliveira (1973).

TABLEAU 2A. — Estimations paramétriques du maximum de vraisemblance des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités quotidiennes extrêmes observées sur un trimestre

Paramètres → Variables ↓	Paramètre d'échelle α_n	Paramètre de localisation β_n	Indice de queue τ
Rentabilité minimale Y_n	0.832 (0.036)	-1.815 (0.069)	-0.217 (0.075) [0.004] {0.000}
Rentabilité maximale Z_n	0.647 (0.052)	1.770 (0.094)	-0.315 (0.104) [0.002] {0.038}

2.2. Méthode paramétrique de régression

La méthode de régression couramment utilisée en ingénierie repose sur les propriétés des statistiques ordonnées des extrêmes (voire Gumbel (1958, pp. 176-178) et Kinnison (1985, pp. 68-71)). Si la base de données contient $N^{obs}(= n \cdot N)$ rentabilités quotidiennes, alors nous obtenons N maxima notés $Y_{1,n}, Y_{2,n}, \dots, Y_{N-1,n}, Y_{N,n}$. Ces observations sont arrangées en ordre croissant pour obtenir

TABLEAU 2B. — Estimations paramétriques de la méthode régression des paramètres de la loi asymptotique des rentabilités quotidiennes extrêmes observées sur un trimestre

Paramètres → Variables ↓	Paramètre d'échelle α_n	Paramètre de localisation β_n	Indice de queue τ
Rentabilité minimale Y_n	0.926 (0.028)	-1.840 (0.021)	-0.272 (0.026) [0.000] {0.000}
Rentabilité maximale Z_n	0.663 (0.018)	1.822 (0.016)	-0.318 (0.022) [0.000] {0.000}

des statistiques ordonnées $Y_{1,n'}, Y_{2,n'}, \dots, Y_{N-1,n'}, Y_{N,n'}$ vérifiant : $Y_{1,n'} \leq Y_{2,n'} \leq \dots \leq Y_{N-1,n'} \leq Y_{N,n'}$. La moyenne de la fréquence aléatoire $F_Y(Y_{i,n'})$ est égale à $i/(N+1)$. La méthode de régression consiste à comparer la fréquence empirique à sa moyenne théorique. Après transformation de ces deux quantités en prenant deux fois le logarithme, nous obtenons une équation réduite non linéaire dont l'estimation produit les valeurs pour les trois paramètres α_n , β_n et τ :

$$-\ln \left[-\ln \left(\frac{i}{N+1} \right) \right] = \frac{1}{\tau} \cdot \ln \alpha_n - \frac{1}{\tau} \cdot \ln [\alpha_n - \tau \cdot (Y'_{i,n} - \beta_n)] + u_{i,n} \quad (6)$$

Nous sommes particulièrement intéressés par le signe de l'indice de queue τ , qui détermine le type de la loi asymptotique. Comme le cas de la loi de Gumbel est un cas intermédiaire ($\tau = 0$), il est nécessaire d'estimer un modèle particulier pour cette loi :

$$-\ln \left[-\ln \left(\frac{i}{N+1} \right) \right] = \frac{Y'_{i,n} - \beta_n}{\alpha_n} + u_{i,n} \quad (7)$$

La méthode de régression fournit des estimateurs de α_n , β_n et τ relativement précis bien que légèrement biaisés⁽⁸⁾. Les équations (6) et (7) sont estimées en minimisant la somme des carrés des résidus; sous l'hypothèse de normalité et d'indépendance des résidus, minimiser cette fonction revient à maximiser la vraisemblance de chaque modèle.

2.3. Méthodes non paramétriques pour estimer de l'indice de queue τ

Les deux méthodes précédentes supposent que les extrêmes observés sont exactement tirés de la loi asymptotique. Des estimateurs de l'indice de queue τ qui ne supposent pas que les observations d'extrêmes soient exactement tirées de cette loi ont été étudiés par Pickands (1975) et Hill (1975). Ces estimateurs reposent sur les statistiques ordonnées de la variable parente X . Pour le maximum, ils sont donnés par les formules suivantes :

$$\tau_{\text{Pickands}} = -\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X'_{N^{obs}-q+1} - X'_{N^{obs}-2q+1}}{X'_{N^{obs}-2q+1} - X'_{N^{obs}-4q+1}}, \quad (8)$$

$$\tau_{\text{Hill}} = \frac{1}{q-1} \cdot \sum_{i=1}^{q-1} \ln X'_{N^{obs}-i} - \ln X'_{N^{obs}-q}, \quad (9)$$

où $(X'_m)_{m=1, N^{obs}}$ est la série des rentabilités quotidiennes rangées en ordre croissant et q est un entier dépendant du nombre d'observations des rentabilités quotidiennes contenues dans la base de données, N^{obs} . L'estimateur de Pickands est consistant si q croît à un rythme suffisamment rapide avec N^{obs} (voir Dekkers et De Haan, 1989). La statistique $(\tau_{\text{Pickands}} - \tau) \cdot \sqrt{q}$ est asymptotiquement distribuée comme une loi normale avec une moyenne nulle et une variance

$\tau^2 \cdot (2^{-2\tau+1} + 1)/[2(2^{-\tau} - 1) \ln 2]^2$. L'estimateur de Pickands est l'estimateur le plus général puisqu'il peut être utilisé pour tout type de loi. L'estimateur de Hill ne peut être utilisé que dans le cas de la loi de Fréchet ($\tau < 0$). L'estimateur de Hill est convergent et est le plus efficace des deux estimateurs. La convergence est encore obtenue dans le cas faible dépendance dans le processus suivi par X . La statistique $(\tau_{\text{Hill}} - \tau) \cdot \sqrt{q}$ est asymptotiquement distribuée comme une loi normale avec une moyenne nulle et une variance τ^2 . Pour les deux estimateurs, une valeur optimale du nombre d'observations à sélectionner dans les queues, q , peut être obtenue en utilisant la méthode de simulation de Monte Carlo comme l'ont suggéré Jansen et De Vries (1991). La méthode est détaillée en Annexe.

2.4. Méthode non paramétrique « bootstrap » pour estimer de l'indice de queue τ

Comme nous l'a suggéré un arbitre, nous utilisons une procédure *bootstrap* pour vérifier la stabilité des estimations. S'inspirant de la procédure décrite dans Efron (1979), nous simulons N^{sim} échantillons *bootstrap* contenant N^{obs} rentabilités quotidiennes à partir de la série de rentabilités observée. Chaque observation de rentabilité résulte d'un tirage aléatoire avec remise. Puis, pour chaque échantillon *bootstrap* de série de rentabilités, nous estimons l'indice de queue avec l'estimateur de Hill décrit en 2.3. Nous obtenons une estimation *bootstrap* de l'indice de queue en prenant la moyenne des N^{sim} indices de queue estimés à partir des N^{sim} échantillons simulés. L'écart-type de l'estimateur *bootstrap* n'est pas calculé par la formule donnée en 2.3 mais il est égal à l'écart-type de l'échantillon des indices de queue estimés à partir des N^{sim} échantillons *bootstrap* simulés.

Comme la distribution des rentabilités varie au cours du temps, une procédure *bootstrap* plus sophistiquée décrite dans Carlstein (1986) est utilisée pour tenir compte de la dépendance temporelle de la série des rentabilités. Pour la constitution de chaque échantillon *bootstrap*, des blocs contenant b rentabilités consécutives (au lieu d'une seule rentabilité) sont tirés sans remise de la série des rentabilités originale.

3. RÉSULTATS EMPIRIQUES

3.1. Données

Les rentabilités logarithmiques quotidiennes du marché boursier français sont calculées à partir de l'indice CAC Général 240 (base de données AFFI)⁽⁹⁾. Elles sont notées R_t et définies comme suit : $R_t = 100 \cdot \ln[(P_t - P_{t-1} + D_t)/P_{t-1}]$. Les données couvrent la période janvier 1977-juin 1990 et contiennent 3 301 observations de rentabilités quotidiennes. Le dividende est inclus dans le calcul des rentabilités pour que les dividendes versés un même jour ne puissent être la cause d'une baisse des prix extrême⁽¹⁰⁾. Avec une telle définition, les rentabilités peuvent prendre n'importe quelle valeur entre $-\infty$ et $+\infty$, et ainsi, n'importe quelle loi d'extrêmes peut être atteinte *a priori*.

Les rentabilités quotidiennes ont une moyenne légèrement positive (0,0643%) et un écart-type élevé (0,995). Les valeurs de la skewness ($-0,532$) et de la kurtosis (6,294) suggèrent des déviations de la loi normale. L'auto-corrélation du premier ordre (généralement attribuée à un effet de non échange) est petite (0,182) mais statistiquement positive. Peu de corrélation sérielle existe à des ordres plus élevés. La corrélation sérielle dans le second moment est nettement positive : 0,188 au premier ordre. La corrélation diminue lentement et reste importante même avec un décalage de vingt jours (0,073), ce qui indique une grande persistance de la volatilité.

Le minimum et le maximum sont définis comme la plus forte chute et la plus forte hausse pendant une séance boursière observées sur une période contenant 60 séances boursières (environ un trimestre). A partir d'observations quotidiennes sur la période janvier 1977-juin 1990, nous obtenons 55 observations d'extrêmes. Une des caractéristiques de ces extrêmes est leur regroupement : il y a 10 trimestres (sur 55) pendant lesquels les maxima et les minima apparaissent dans la même semaine. Les extrêmes semblent présenter peu de variations selon le jour de la semaine : les extrêmes négatifs ont lieu plus fréquemment le jeudi (27,3 %) que le mardi (20,0 %), le mercredi (20,0 %), le lundi (16,4 %) et le vendredi (16,3 %). Les extrêmes positifs ont lieu plus fréquemment le mercredi (34,5 %) que le jeudi (27,3 %), le mardi (16,4 %), le lundi (10,9 %) et le vendredi (10,9 %). De même, il y a peu de variations selon le mois de l'année : les extrêmes semblent s'étaler uniformément sur l'année avec cependant plus d'observations en octobre (8 minima et 9 maxima).

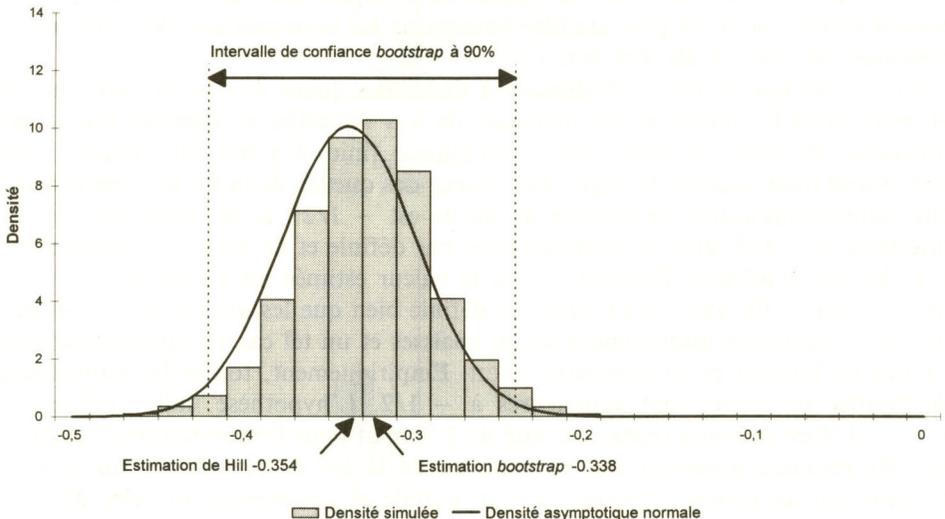
3.2. Estimations de l'indice de queue

Les méthodes décrites dans la partie 2 sont utilisées pour estimer l'indice de queue pour les deux types d'extrêmes. Les résultats d'estimation reportés dans les tableaux 2A, B et C sont homogènes. Les estimations d'indice de queue varient peu selon l'estimateur utilisé. Pour les minima, l'indice de queue se situe entre $-0,354$ et $-0,217$ et pour les maxima entre $-0,318$ et $-0,239$. L'estimateur de Hill est étudié en particulier en utilisant la procédure *bootstrap* décrite en 2.4. La figure 1 représente la distribution *bootstrap* de l'indice de queue de gauche obtenue à partir de 1 000 simulations. Les échantillons *bootstrap* sont construits en tirant avec remise une rentabilité à la fois de la série de rentabilités observée. La distribution de l'estimateur est approximativement normale comme le prévoit la théorie⁽¹¹⁾. De plus, les estimations *bootstrap* de l'indice de queue et de son écart-type sont proches des valeurs obtenues à partir des données observées. Par exemple, pour l'indice de queue gauche, nous obtenons $-0,338$ avec un intervalle de confiance à 90 % égal à $[-0,398, -0,271]$ avec la méthode *bootstrap* et $-0,354$ avec un intervalle égal à $[-0,421, -0,268]$ avec l'estimateur de Hill calculé à partir des données observées. Les estimations sont légèrement différentes dans le cas d'un tirage des rentabilités par blocs pour tenir compte de la dépendance dans la série de rentabilités observée. Avec des blocs d'une longueur de cinq jours, l'estimation de l'indice de queue gauche est $-0,311$ avec un intervalle

TABLEAU 2C. — Estimations non paramétriques de Pickands, de Hill et de bootstrap de l'indice de queue

Estimateurs → Paramètre τ ↓	Estimateur de Pickands	Estimateur de Hill	Méthode <i>bootstrap</i>
Extrêmes négatifs τ^{min}	-0.353 (0.177) [0.046] {0.203}	-0.354 (0.041) [0.000] {0.000}	-0.338 (0.040) [0.000] {0.000}
Extrêmes positifs τ^{max}	-0.239 (0.174) [0.170] {0.067}	-0.267 (0.038) [0.000] {0.000}	-0.258 (0.035) [0.000] {0.000}

Note : Les estimations paramétriques du maximum de vraisemblance et de régression des trois paramètres de la loi asymptotique sont obtenues à partir de 55 rentabilités quotidiennes extrêmes de l'indice CAC Général 240 observées chaque trimestre sur la période janvier 1977-juin 1990 (base de données AFFI). Les estimations non paramétriques de Pickands et de Hill sont obtenues à partir d'observations de rentabilités quotidiennes contenues dans les queues. Le nombre optimal d'observations à prendre en compte est obtenu par une méthode de simulation de Monte Carlo décrite en Annexe. La méthode *bootstrap* utilise l'estimateur de Hill pour calculer l'indice de queue à partir de 1 000 échantillons simulés de séries de N^{obs} rentabilités quotidiennes. Les écarts-type asymptotiques sont donnés entre parenthèses. Les p -valeurs d'un test bilatéral de significativité de l'hypothèse $\tau = 0$ (cas compatible avec la loi normale) sont reportées entre crochets. Les p -valeurs d'un test unilatéral de significativité de l'hypothèse : $\tau < -1/2$ (cas compatible avec les lois stables de Pareto-Lévy) sont reportées entre accolades. Les deux tests sont des t -tests asymptotiquement distribués comme une loi normale.

Fig. 1. — Histogramme de l'estimateur *bootstrap* de l'indice de queue τ pour les extrêmes négatifs

de confiance à 90 % égal à $[-0,456, -0,191]$. Les estimations tendent à être un peu moins précises quand la conditionalité du processus de rentabilités est prise en compte. Les estimations de Pickands sont les moins précises puisqu'elles utilisent beaucoup moins d'observations de queues. Les estimations des indices

des queues de droite et de gauche sont semblables, ce qui suggère une contribution égale des deux queues à la volatilité des rentabilités quotidiennes. Un t-test ne conduit pas au rejet de l'hypothèse nulle définie par $\tau^{max} = \tau^{min}$ au seuil de signification de 5 %.

3.3. Application au choix d'une loi pour les rentabilités

Pour les deux types d'extrêmes et tous les estimateurs, l'indice de queue est négatif. L'hypothèse nulle H_0 définie par $\tau = 0$ est fortement rejetée à des seuils de confiance très bas en utilisant les méthodes paramétriques du maximum de vraisemblance et de régression et les méthodes non paramétriques de Hill et *bootstrap* ⁽¹²⁾. Par exemple, les *t*-tests calculés avec l'estimateur maximisant la vraisemblance sont égaux à $-2,89$ pour les minima et $-3,02$ pour les maxima. L'indice de queue est significativement différent de zéro au seuil conservateur de 1 %. Ce résultat est confirmé par le test de ratio de vraisemblance qui conduit à un franc rejet de la loi de Gumbel (et *a fortiori* de la loi de Weibull). La valeur de ce test est égale à $6,08$ [$= -2 \cdot (-73,03 + 69,99)$] pour le minima et $6,02$ [$= -2 \cdot (-89 \cdot 55 - 86 \cdot 54)$] pour le maxima. La statistique de ce test est asymptotiquement distribuée comme un chi-deux à un degré de liberté. Ainsi, les *p*-valeurs sont bien inférieures à 10^{-3} . En conclusion, les résultats permettent de définir clairement le type de loi asymptotique : pour les plus grandes baisses comme pour les plus grandes hausses, la loi asymptotique des rentabilités extrêmes est *une loi de Fréchet*.

La loi des rentabilités quotidiennes a donc une queue épaisse ce qui conduit au rejet de la loi normale, des mélanges de lois normales en nombre fini et des processus de diffusion avec sauts à amplitude finie. Un test plus poussé peut être réalisé pour préciser le degré d'épaisseur des queues de la loi des rentabilités. Une valeur importante de l'indice de queue est $-1/2$: si la valeur estimée est inférieure à $-1/2$, alors la variance n'est pas définie et un tel cas est compatible avec les lois stables de Pareto-Lévy ; si la valeur estimée est supérieure à $-1/2$ (et inférieure à 0), alors la variance est définie bien que les queues de la distribution des rentabilités quotidiennes soient épaisses et un tel cas est compatible avec les lois de Student et les processus ARCH. Empiriquement, toutes les estimations de l'indice de queue sont supérieures à $-1/2$. L'hypothèse nulle définie par $\tau < -1/2$ est toujours rejetée au seuil de 5 % sauf pour l'estimateur de Pickands. De tels résultats montrent que la variance de la loi de rentabilités du marché boursier sur la période étudiée est bien définie et conduisent au rejet des lois stables de Pareto-Lévy.

L'erreur de seconde espèce (risque de type II) est aussi étudiée. Elle est définie comme le risque de choisir la loi de Gumbel alors qu'en réalité ce n'est pas la bonne loi. L'hypothèse alternative la plus générale est définie par l'hypothèse composite : $\tau \neq 0$. Puisque la rentabilité des actifs n'est vraisemblablement pas une variable bornée, une hypothèse alternative plus réaliste est : $\tau < 0$. Pour obtenir une valeur spécifique de l'erreur de seconde espèce, il faut considérer une hypothèse alternative simple. Comme certains chercheurs se sont interrogés sur l'exis-

tence de la variance, une hypothèse alternative peut être : H_1 définie par $\tau = -1/2$ (les valeurs de l'indice de queue en dessous du seuil de $-1/2$ étant compatibles avec les lois stables de Pareto-Lévy à variance infinie). Une hypothèse alternative intermédiaire est envisagée : H_1 définie par $\tau = -1/3$. La loi de l'indice de queue est simulée sous les hypothèses alternatives choisies ci-dessus. L'erreur de première espèce est fixée à 5 % et correspond à une valeur critique de l'indice de queue de $-0,218$. Avec $H_1 : \tau = -1/3$, le risque de type II est

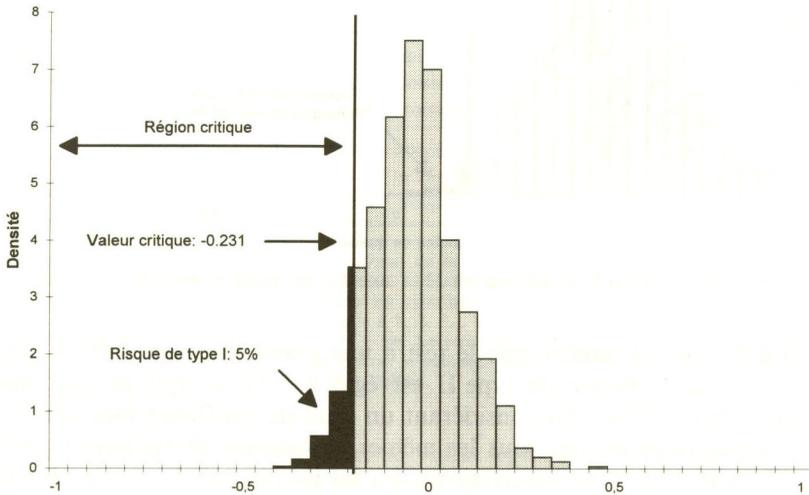


Fig. 2A. — Distribution de l'indice de queue sous l'hypothèse nulle H_0 : la loi de Gumbel ($\tau = 0$)

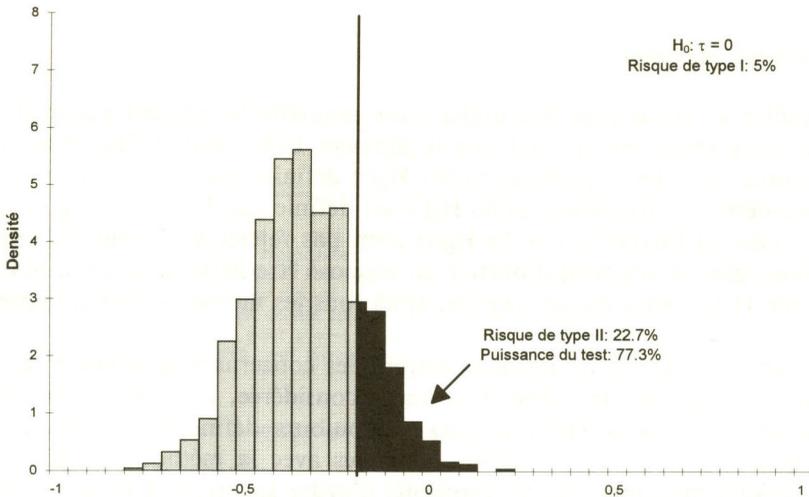


Fig. 2B. — Hypothèse alternative H_1 : une loi de Fréchet avec $\tau = -0,33$.

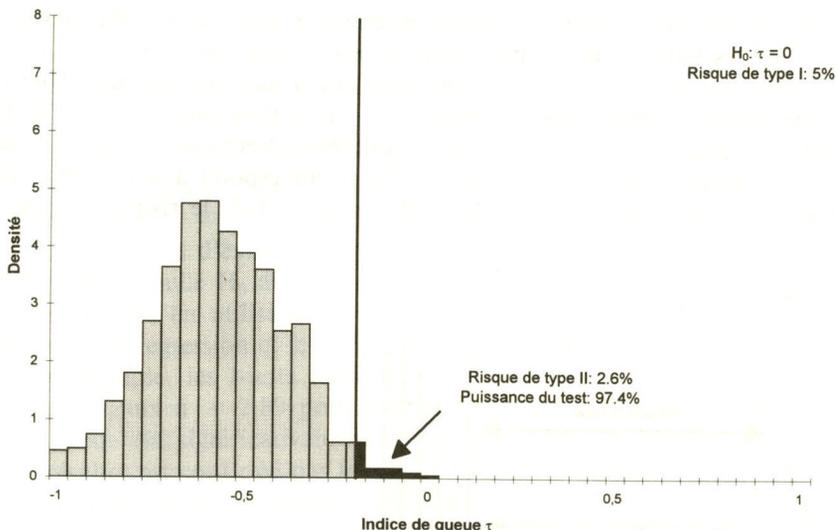


Fig. 2C. — Hypothèse alternative H_1 : une loi de Fréchet avec $\tau = -0,50$

égal à 18,6 %, ce qui montre que le test a une grande puissance (81,4 %). Avec $H_1 : \tau = -1/2$, le risque de type II est égal à 3 %, ce qui produit une plus grande puissance (97 %). En considérant un seuil de confiance plus conservateur (2,5 %), la puissance du test sous les mêmes hypothèses alternatives est toujours élevée : 72 % et 95,8 % respectivement. La loi de l'indice de queue obtenue par simulation sous l'hypothèse nulle et sous les deux hypothèses alternatives sont représentées sur les figures 2A, B et C. La valeur critique et les risques de type I et II y figurent aussi.

3.4. Moment maximal

L'indice de queue peut être utilisé pour connaître le moment maximal, c'est-à-dire le plus grand entier r tel que le moment $E(R^r)$ soit défini. Nous procédons comme suit : les hypothèses nulles $H_0(r)$ définies par : $k < r$ ou $\tau < -1/r$ sont considérées. L'hypothèse nulle $H_0(+\infty)$ définie par $k = +\infty$ ou $\tau < 0$ est un cas limite. Si l'hypothèse nulle $H_0(r)$ n'est pas rejetée à un seuil de signification donné, alors le moment d'ordre r est supposé être défini à ce seuil. Si l'hypothèse nulle $H_0(+\infty)$ n'est pas rejetée, alors tous les moments sont supposés être définis.

Le tableau 3 donne les résultats empiriques concernant le moment maximal. Quelque soit l'estimateur utilisé et la queue considérée, le troisième moment (et donc a fortiori le deuxième moment) est toujours défini au niveau de 10 %. Les résultats utilisant les estimations obtenues avec la méthode de Hill qui est la plus précise montrent que les moments d'ordre supérieur à cinq ne sont pas définis.

TABLEAU 3. — Moment maximal de la loi des rentabilités du marché boursier français

Queue → Estimateurs ↓	Queue gauche (extrêmes négatifs)	Queue droite (extrêmes positifs)
Maximum de vraisemblance	1% : dixième 5% : septième 10% : sixième	1% : tous 5% : tous 10% : tous
Pickands	1% : tous 5% : tous 10% : dixième	1% : tous 5% : tous 10% : dixième
Hill	1% : troisième 5% : troisième 10% : troisième	1% : cinquième 5% : quatrième 10% : quatrième
Bootstrap	1% : troisième 5% : troisième 10% : troisième	1% : cinquième 5% : quatrième 10% : quatrième

Note : Ce tableau donne le moment maximal de la loi des rentabilités du marché boursier français en étudiant le poids des mouvements extrêmes. Pour un seuil de signification donné, un *t*-test et sa *p*-valeur sont calculés pour les hypothèses nulles $H_0(r)$ définies par : $k < r$ ou $\tau < -1/r$ où la variable entière *r* est égale à 1, 2, 3... L'hypothèse nulle $H_0(+\infty)$: $k = +\infty$ ou $\tau < 0$ correspond au cas limite : $r = +\infty$. Le plus grand entier *r* pour lequel $H_0(r)$ n'est pas rejeté pour le seuil fixé est reporté dans le tableau. Si l'hypothèse nulle $H_0(+\infty)$ n'est pas rejetée, alors tous les moments sont définis.

TABLEAU 4. — Détermination de la valeur optimale pour l'estimateur de Hill de l'indice de queue

Paramètre de forme (indice de queue) → Valeur optimale de <i>q</i> ↓ MCE, [MCE théorique] \	<i>k</i> =1 ($\tau=-1$)	<i>k</i> =2 ($\tau=-1/2$)	<i>k</i> =3 ($\tau=-1/3$)	<i>k</i> =4 ($\tau=-1/4$)
<i>q</i> =338 <i>k</i> =1 ($\tau=-1$)	0.0040 [0.0030]	0.0093	0.0133	0.0277
<i>q</i> =114 <i>k</i> =2 ($\tau=-1/2$)	0.0097	0.0032 [0.0023]	0.0038	0.0057
<i>q</i> =74 <i>k</i> =3 ($\tau=-1/3$)	0.0199	0.0040	0.0033 [0.0015]	0.0034
<i>q</i> =48 <i>k</i> =4 ($\tau=-1/4$)	0.0293	0.0064	0.0049	0.0042 [0.0015]

Note : Ce tableau indique la moyenne du carré des erreurs (MCE) et entre crochets la MCE théorique pour différentes lois de Student et de Cauchy représentées par leur paramètre de forme *k* (ou de façon équivalente par leur indice de queue τ) et pour différents nombres d'observations *q* utilisées pour calculer l'estimateur de Hill de l'indice de queue. La méthode pour trouver le nombre optimal d'observations de rentabilités contenues dans les queues à prendre en compte est décrite en Annexe. Les valeurs de *q* minimisant la MCE sont 338 pour $\tau = -1$, 114 pour $\tau = -1/2$, 74 pour $\tau = -1/3$ et 48 pour $\tau = -1/4$. La valeur minimale de la MCE se trouve sur la diagonale du tableau pour chaque loi étudiée.

3.5. Comparaison avec le marché boursier américain

Jansen et De Vries (1991), Longin (1993 et 1995*b*) et Loretan et Phillips (1994) ont calculé des valeurs d'indice de queue pour le marché boursier américain. Jansen

et De Vries (1991) et Loretan et Phillips (1995) utilisent des rentabilités quotidiennes de l'indice *Standard and Poor's* 500 sur la période 1962-1986 et trouvent une valeur du paramètre de forme k aux alentours de 3,70 pour la queue gauche et de 3,30 pour la queue droite, c'est-à-dire des valeurs d'indice de queue de l'ordre de $-0,30$. Longin (1993 et 1995b) trouve une valeur de l'indice de queue similaire pour une période beaucoup plus longue 1885-1990 : $-0,361$ pour les minima et $-0,330$ pour les maxima. De plus, la valeur de l'indice de queue est statistiquement stable au cours du temps. Ces résultats semblent indiquer que le comportement statistique des extrêmes est identique sur les deux marchés. Dans notre étude « *The choice of the distribution for asset returns : extreme values can help,* » nous concluons que, comme pour le cas du marché boursier français, seuls les lois de Student non conditionnelles et les processus conditionnels ARCH ne sont pas rejetés par les données.

4. CONCLUSION

Le but de notre étude est de choisir une loi statistique pour décrire le comportement des rentabilités boursières. La théorie de la valeur extrême permet de différencier les modèles proposés dans la littérature académique et utilisés par les professionnels puisqu'ils se distinguent par le poids de leurs queues. Les résultats empiriques concernant le marché boursier français sur la période 1977-1990 conduisent au rejet de la loi normale, des mélanges de lois normales en nombre fini et des processus de diffusion avec sauts à amplitude finie qui contiennent trop peu d'extrêmes et au rejet des lois stables de Pareto-Lévy qui en contiennent beaucoup trop. Pour les données utilisées, les résultats suggèrent l'emploi d'une loi de Student dans un cadre non conditionnel ou d'un processus ARCH dans un cadre conditionnel. Comme notre choix est fondé sur le comportement du marché pendant les périodes les plus volatiles, le domaine d'application ne devrait concerner que des problèmes sensibles aux événements extrêmes comme les booms et les krachs boursiers; notre étude n'apporte en effet pas d'information sur le milieu de la distribution des rentabilités qui correspond aux périodes « normales » des marchés financiers. Nous discutons ci-dessous quelques applications de la théorie de la valeur extrême dans lesquelles la distribution asymptotique pour les rentabilités extrêmes et une distribution compatible pour les rentabilités quotidiennes peuvent être utilisées.

Un premier problème sensible aux variations extrêmes de prix est la fixation du niveau de marge sur les marchés à terme. Considérant un contrat à terme, l'investisseur long a une forte incitation à rompre le contrat en cas de chute du prix, alors que l'investisseur court a une forte incitation à rompre le contrat en cas de hausse du prix. Pour assurer l'intégrité des marchés à terme, plusieurs mécanismes ont donc été mis en place : les investisseurs n'échangent pas directement entre eux mais passent par des intermédiaires financiers qui échangent au sein d'une bourse. De plus, une chambre de compensation s'interpose entre les deux parties pour garantir la réalisation de chaque transaction. Les contrats sont

aussi renouvelés chaque jour de façon à limiter le risque dû à la fluctuation des cours (mécanisme appelé *daily marked-to-market* en anglais). Enfin, les intermédiaires financiers demandent à leurs clients de déposer une certaine somme d'argent appelée marge. Ces dépôts garantissent que les clients honorent leurs contrats. Un niveau de marge élevé assure une bonne protection contre le risque de défaut et diminue le risque systémique; un niveau de marge bas diminue les coûts de transaction supportés par les investisseurs. Il existe donc un niveau optimal de marge associé à une probabilité de violation de marge dérivée de ce dilemme. Dans notre article « *Optimal margin level in futures markets: a parametric extreme-based method* », nous utilisons la théorie de la valeur extrême pour fixer le niveau de marge sur les marchés à terme pour une probabilité de violation de marge sur une période donnée. Les résultats empiriques utilisant des données américaines montrent que l'utilisation de la loi normale sous-estime l'occurrence des extrêmes alors que la théorie de la valeur extrême donne des valeurs proches de la réalité.

Un problème semblable se pose pour fixer le ratio de capital minimum requis pour les institutions financières (banques, maisons de titres, mainteneurs de marché...). Un niveau minimum de capital couvre le risque de position qui peut provenir de l'exposition de ces entités aux fluctuations de la valeur de leurs actifs. Trois méthodes sont actuellement utilisées : une approche dite « complète » aux Etats-Unis, une approche par « bloc » suggérée par le Comité de Bâle et une approche fondée sur une version simplifiée du modèle de marché au Royaume-Uni. Seule la dernière méthode est directement reliée au risque d'un portefeuille impliquant plus de capital pour une position plus risquée. Dans notre article « *Capital requirement : a new method based on extreme price variations*, » nous proposons une méthode plus appropriée en utilisant la distribution des extrêmes puisque le risque de faillite est directement lié à l'occurrence de krachs (pour une position longue) et de booms (pour une position courte). Une formule similaire à celle qui donne le niveau de marge sur les marchés à terme pourrait être utilisée pour fixer le ratio de capital minimal pour une probabilité de faillite donnée.

La théorie de la valeur extrême peut aussi être utilisée pour tester la législation financière existante comme celle fixant le niveau de marge sur le marché des actions. A la Bourse de New York, il est possible d'acheter les titres à la marge : l'investisseur ne paye qu'une partie du prix et emprunte l'autre partie à sa maison de titres. A la suite du boom de la fin des années 1920 et du krach de 1929, le Congrès a dénoncé cette pratique comme déstabilisant le marché. En 1934, le Congrès transféra à la Réserve Fédérale le pouvoir de fixer le niveau de marge sur les marchés d'actions afin de contrôler la volatilité et la spéculation via la quantité de crédit accordée aux investisseurs. Dans notre article « *The Margin-Volatility Relationship: A Test Based on Extreme Price Movements*, » nous réexaminons la relation entre le niveau des marges sur le marché des actions et la volatilité de ce marché dans le cas des Etats-Unis. Les études précédentes mesuraient la volatilité par la variance. Cependant l'instabilité du marché des actions a souvent été reliée aux mouvements extrêmes de prix tels que les booms et les krachs. L'occurrence de ces événements a même été à l'origine de la législation.

Nous utilisons l'indice de queue comme mesure de la volatilité. Nous régressons l'indice de queue sur le niveau de marge pour tester l'impact de la législation. Empiriquement, nous ne trouvons pas de relation significative entre les deux variables.

La distribution des extrêmes peut aussi être utilisée pour comparer le risque d'un actif sur deux sous périodes ou le risque de deux actifs sur une même période. Cette approche est semblable à celle de Rothschild et Stiglitz (1970) qui définissent le degré de risque à partir des queues de la distribution de la rentabilité. Une telle approche pourrait être rapprochée de la dominance stochastique; la comparaison des distributions de probabilités point par point qui est particulièrement lourde dans la dominance stochastique pourrait être remplacée par une comparaison des paramètres des lois d'extrêmes qui serait plus simple. Dans notre article « Instability of the US equity market: empirical evidence based on extreme price movements, » nous utilisons cette méthode pour comparer le degré d'instabilité du marché des actions sur deux sous périodes de l'histoire financière des Etats-Unis : 1836-1914 caractérisée par l'absence d'institutions fédérales majeures et 1914-1990 marquée par la présence d'une Banque Centrale, le Federal Reserve System. Empiriquement, nous trouvons que la première période est plus stable que la seconde confirmant les travaux de Jones, Sylla and Wilson (1991).

Enfin, la théorie de la valeur extrême peut être utilisée dans la gestion du risque d'un portefeuille. Dans notre article « Winning in the worst and best of Times: boom and crash options », nous proposons de nouveaux produits dérivés appelés *boom option* et *crash option*. Ces nouvelles options permettent aux investisseurs de se couvrir contre les variations extrêmes de cours. L'introduction de ces options est motivée par la faible efficacité des techniques d'assurance de portefeuille en période de très forte volatilité.

ANNEXE

Calcul de la valeur optimale q pour les estimateurs non paramétriques

La valeur de q est obtenue par simulation de Monte-Carlo (méthode proposée par Jansen et De Vries (1991)) : nous simulons N^{obs} observations de quatre variables aléatoires suivant une loi de Cauchy et trois lois de Student avec des degrés de liberté égaux à 2, 3 et 4. Les queues de ces quatre lois présentent différentes épaisseurs et correspondent à des indices de queue égaux à -1 , $-1/2$, $-1/3$ et $-1/4$. Les queues d'une loi de Cauchy contiennent beaucoup d'extrêmes alors que celles d'une loi de Student à quatre degrés de liberté en contiennent relativement peu. Puis nous estimons l'indice de queue en utilisant les estimateurs proposés par Pickands et Hill avec différentes valeurs de q allant de 1 à 500. Nous répétons cette simulation 500 fois. Pour chaque loi et pour chaque valeur de q , nous obtenons une série de 500 observations de l'estimateur de l'indice de queue. Puis pour chaque loi j , nous calculons la moyenne du carré des erreurs de cette série notée MCE (*Mean Square Error* en anglais). Nous retenons la valeur de q , notée q_j^{opt} , qui minimise la MCE.

Avec des données réelles, nous calculons l'estimation de Pickands et de Hill pour les valeurs optimales obtenues précédemment $(q_j^{opt})_{j=1,4}$. Ces valeurs correspondent aux quatre valeurs choisies pour l'indice de queue $(\tau_j)_{j=1,4}$. Nous retenons finalement l'esti-

mation qui est la plus proche de la valeur choisie τ_j . Pour cela nous calculons les statistiques $(\tau^{\text{Hill}}(q_j^{\text{opt}}) - \tau_j)/\sigma_j$ où $\tau^{\text{Hill}}(q_j^{\text{opt}})$ est l'estimateur de Hill calculé avec q_j^{opt} extrêmes et σ_j est l'écart-type de cette estimation, et la p -valeur associée p_j . Nous retenons finalement l'estimation associée $\tau^{\text{Hill}}(q_j^{\text{opt}})$ qui est la plus proche de τ_j , c'est-à-dire celle qui correspond à la plus faible valeur de p_j . Dans cette étude, nous avons sélectionné les 74 rentabilités les plus basses et les 48 rentabilités les plus hautes pour calculer l'estimateur de Hill. Les valeurs optimales pour l'estimateur de Pickands sont respectivement 175 et 114.

NOTES

- (1) Par exemple, le fait d'ignorer l'hétéroscédasticité du processus de rentabilités pour tester des modèles peut mener à de fausses conclusions à partir des résultats des tests statistiques habituels. Bollerslev, Engle et Wooldridge (1988) et Ferson et Harvey (1991) montrent que le changement temporel de la volatilité est un facteur déterminant de la prime de risque et peut expliquer l'échec du CAPM non conditionnel pour décrire le comportement du prix des actions.
- (2) Dans le reste de l'article, les résultats théoriques ne sont présentés que pour le maximum puisque les résultats pour le minimum peuvent être obtenus directement à partir de ceux du maximum en utilisant la formule suivante : $Z_n(X) \equiv \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\text{Max}(-X_1, -X_2, \dots, -X_n) = -Y_n(-X)$.
- (3) Ces hypothèses sont courantes en théorie des probabilités. Par exemple, le résultat du théorème central limite est aussi dérivé de ces hypothèses. Pour ce théorème, la variable d'intérêt est la somme de variables aléatoires (au lieu du maximum et du minimum). La loi limite est soit la loi normale soit une loi stable de Pareto-Lévy. Les deux théorèmes ont d'ailleurs en commun plus que les hypothèses. Sous certaines conditions, le paramètre d'échelle α_n est le même dans les deux théorèmes (Galambos 1978, pp. 232-238).
- (4) Par exemple, la loi sans moments définie par $F_X(x) = 1 - 1/\ln(x)$ pour $x > e$ ne satisfait aucune des conditions (C1-3).
- (5) Une revue de la littérature peut être trouvée dans Fama (1965) et Allaz (1994).
- (6) Ce résultat a été généralisé pour les processus ARCH(p) et GARCH(1,1).
- (7) Une description plus détaillée de l'estimation de la loi des valeurs extrêmes peut être trouvée dans Longin (1993 et 1995a) en français et Longin (1995b) en anglais.
- (8) Longin (1993) montre par des simulations de Monte-Carlo qu'il y a un biais vers le bas d'environ 4 % pour l'indice de queue et que les deux autres paramètres ne sont presque pas biaisés.
- (9) Voir Hamon et Jacquillat (1993) pour une présentation de la base de données et des résultats empiriques sur le marché boursier français.
- (10) Cette remarque s'applique particulièrement au cas français pour lequel le versement de dividendes est concentré sur certaines périodes de l'année. Hamon (1986) rapporte que les distributions de dividendes se produisent principalement en juillet (58,6 %), juin (19,5%) et en septembre (13,8 %).
- (11) L'estimateur *bootstrap* semble converger relativement vite : l'estimation de l'indice de queue gauche est égale à -0,341 avec 50 simulations, -0,338 avec 500 simulations et -0,337 avec 5 000 simulations.
- (12) Comme le cas de la loi de Gumbel ($\tau = 0$) est consistant avec la loi normale couramment utilisée en finance, rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie pourrait avoir de grandes conséquences en termes de coûts (changement de stratégie d'investissement, nouvelles recherches considérant des hypothèses alternatives...). Cela devrait amener la personne qui prend la décision à considérer des seuils de confiance très bas (risque de type I).

RÉFÉRENCES

- Alexandre H. (1991), La Quasi-Marche Aléatoire, *Finance*, 13, p. 5-21.
 Allaz B. (1994), A Short Survey of Some Empirical Features of Financial Assets Rates of Returns, *Document de Travail*, HEC.

- Berman S. M. (1963), Limiting Theorems for the Maximum Term in Stationary Sequences, *Annals of Mathematical Statistics*, 35, p. 502-516.
- Black F. et M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-659.
- Bollerslev T., Engle R. F. et Wooldridge J. M. (1988), « A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances, *Journal of Political Economy*, 96, p. 116-131.
- Carlstein E. (1986), « The Use of Subseries Values for Estimating the Variance of a General Statistic from a Stationary Sequence, *Annals of Statistics*, 14, p. 1171-1179.
- Chu K.C. (1973), Estimation and Decision for Linear Systems with Elliptically Random Processes, *IEEE Transactions in Automatic Control*, AC-18, p. 499-505.
- Dekkers A. L. M. et De Haan L. (1989), On the Estimation of the Extreme Value Index and Large Quantile Estimation, *The Annals of Statistics*, 17, p. 1795-1832.
- De Haan L., Resnick I. S., Rootzèn H. et De Vries C. G. (1989), Extremal Behavior of Solutions to a Stochastic difference Equation with Applications to ARCH Process, *Stochastic Processes and their Applications*, 32, p. 213-224.
- Duan J.-C. (1995), The GARCH Option Pricing Model, *Mathematical Finance*, 5, p. 13-32.
- Efron B. (1979), Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife, *The Annals of Statistics*, 21, 460-480.
- Engle R. F. (1982), Auto-regressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, 50, p. 987-1007.
- Fama E. F. (1965), The Behavior of Stock Market Prices, *The Journal of Business*, 38, p. 34-105.
- Feller W. (1971), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Volume 2, Wiley, New York.
- Ferson W. et Harvey C. R. (1991), The Variation of Economic Risk Premiums, *Journal of Political Economy*, 99, p. 385-415.
- Fontaine P. (1990), Les cours des marchés d'actions suivent-ils une marche au hasard?, *Finance*, 11, p. 107-121.
- Galambos J. (1978), *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, John Willey and Sons.
- Gnedenko B. V. (1943), Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Annals of Mathematics*, 44, p. 423-453.
- Gumbel E. J. (1958), *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York.
- Hamon J. (1986), Le caractère saisonnier des rentabilités mensuelles à la Bourse de Paris, *Finance*, 7, p. 57-74.
- Hamon J. et Jacquillat B. (1992), *Le marché français des actions. Études empiriques 1977-1991*, Presses Universitaires de France.
- Hill B. M. (1975), A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *Annals of Statistics*, 46, p. 1163-1173.
- Hols M. C. A. B., De Vries C. G. (1991), The Limiting Distribution of Extremal Exchange Rate Returns, *Journal of Applied Econometrics*, 6, p. 287-302.
- Jacob B. (1989), Extrêmes de variables aléatoires et processus, *Document de Travail*, LCPC et ENPC.
- Jansen D. W. De Vries C. G. (1991), On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspectives, *The Review of Economic and Statistics*, 73, p. 18-24.
- Jenkinson A. F. (1955), The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements, *Quarterly Journal of the Royal Meteorology Society*, 87, p. 145-158.
- Jones C.P., Sylla R. E. et Wilson J. W. (1988), Financial Market Panics and Volatility in the Long Run, 1830-1988, Dans, *Crashes and Panics*, Edité par E. N. White, *Business One Irwin*.
- Kinnison R. R. (1985), *Applied Extreme Value*, Battelle Press.
- Kon S. 1984, Models of Stock Returns. A Comparison. *Journal of Finance*, 39, p. 147-165.
- Leadbetter M. R., Lindgren G. Rootzèn H. (1983), *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer Verlag, New York.

- Longin F. M. (1993), Volatilité et mouvements extrêmes du marché boursier, Thèse, HEC.
- Longin F. M. (1994a), The Margin-Volatility Relationship: A Test Based on Extreme Price Movements, *Document de Recherche*, # 191-94, London Business School.
- Longin F. M. (1994b), Instability of the US Equity Market: Empirical Evidence Based on Extreme Price Movements, *Document de Travail*, ESSEC.
- Longin F. M. (1995a), La théorie des valeurs extrêmes : présentation et premières applications en finance, *Journal de la Société Statistique de Paris*, 136, p. 77-97.
- Longin F. M. (1995b), The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns, A paraître dans *Journal of Business*.
- Longin F. M. (1995c), Optimal Margins in Futures Markets: A Parametric Extreme-based Approach, *Proceeding of the IXth CBOT Conference on Futures and Options*, Bonn, Allemagne.
- Longin F. M. (1995d), Capital Requirement: A New Method Based on Extreme Price Variations, *Document de Travail*, ESSEC.
- Longin F. M. (1995e), Winning in the Best and Worst of Times: Boom and Crash Options, *Document de Travail*, ESSEC.
- Longin F. M. (1995f), The Choice of the Distribution for Asset Returns: Extreme Values Can Help, *Document de Travail*, ESSEC.
- Loretan M. et Phillips P. C. B. (1994), Testing for Covariance Stationarity of Heavy-tailed Time Series: An Overview of the Theory with Applications to Several Financial Datasets, *Journal of Empirical Finance*, 2, p. 211-248.
- Louvet P. et Taramasco O. (1990), L'effet « Jour de la semaine à la Bourse de Paris » : une approche par les moyennes mobiles, *Finance*, 11, p. 83-109.
- Mandelbrot B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *The journal of business*, 36, p. 394-419.
- Mood A. M., Graybill T. A., Boes D. C. (1974), *Introduction to the Theory of Statistics*, McGraw-Hill, New York.
- Pickands J. (1975), Statistical Inference Using Extreme Order Statistics, *Annals of Statistics*, 3, p. 119-131.
- Praetz P. D. (1972), The Distribution of Share Price Changes, *Journal of Business*, 45, p. 49-55.
- Press S. J. (1967), A Compound Events Model for Security Prices, *Journal of Business*, 40, p. 317-335.
- Rothschild M. et Stiglitz J. E. (1970), Increasing Risk : I. A Definition, *Journal of Economic Theory*, 2, p. 225-243.
- Tiago de Oliveira J. (1973), Statistical Extremes, A Survey, Center of Applied Mathematics, Faculty of Sciences, Lisbon.
- Walter C. (1989), Levy-Stable Distribution and Fractal Structure in the French Market, *Proceeding of the First International AFIR Colloquium*, Paris, 3, p. 241-259.